# מתמטיקה בדידה – סמסטר א תשע"ב – תרגיל 5 – פונקציות

**תרגילים להגשה:1 א,ג,ד. 3 . 5. 7. 8. 9 ב,ד. 11, 12, 13א,ג,ה.**

1. ***יהיו* *,* *.***
2. **רשם/י את כל הפונקציות מ- *A ל-* *B*  *שאינן על.***

ע"פ הגדרת פונקציה, אנו צריכים להתאים לכל איבר בA איבר יחיד בB. איננו יכולים שחלק מהאיברים בA יותאמו ל1 וחלקם ל2, אחרת נקבל פונקצית על, ולכן ישנן רק שתי פונקציות כאלו:

1. **~~רשם/י את כל הפונקציות מ-~~ *~~B ל-~~**~~A שאינן חד-חד-ערכיות.~~***

יש רק 2 איברים בB, ולכן כל פונקציה שאיננה חח"ע מקיימת , ומכאן שהפונקציות הן:

1. **מצא/י פונקציות  ו-  כך ש-  אך .**
2. **מצא/י פונקציות  ו-  כך ש-  חד-חד-ערכית ועל אך .**
3. **~~תהיינה ,  ותהינה .~~**
4. **~~האם יתכן ש ? נמק/י. ב. האם יתכן ש ? נמק/י.~~**
5. לא. עוצמת B גדולה מעוצמת A, ולכן לא ניתן למצוא פונקציה על שעוברת דרך A ומגיעה לB.
6. ייתכן. לדוגמא , .
7. **נתונה פונקציות .**

**ידוע שלכל , מתקיים: .**

1. **הוכח/י: אם היא חד-חד-ערכית אז גם  היא חד-חד-ערכית.**

תהי פונקציה חח"ע כלשהי. יהיו , כך ש. צ"ל כי :

שני המעברים הראשונים היו על סמך הליניאריות של מספרים שלמים, והמעבר האחרון היה על סמך זה ש חח"ע.

1. **הוכח/י :  אינה פונקציה על.**

*צ"ל כי קיים , כך שהוא לא קיים בתמונה של , ואכן קיימים אינסוף מספרים כאלו: כל המספרים הזוגיים, כי הפונקציה f היא לוקחת מספר טבעי (התוצאה של g), מכפילה אותו ב2 (ואז זהו מספר זוגי) ומחסירה ממנו אחד ולכן היא נותנת רק מספרים אי-זוגיים.*

1. **נגדיר: . חשב/י את , כאשר .**

אם  זוגי:

אם  אי- זוגי:

ראשית נגדיר במפורש את :

נשים לב לכך ש(כנ"ל) הפונקציה נותנת מספרים אי-זוגיים בלבד, ובהתאמה לכך ניתן לכתוב את :

1. **~~נתונות פונקציות  .~~**

**~~ידוע שלכל  מתקיים: .~~**

1. **~~הוכח/י: אם ~~ ~~היא~~~~חד-חד-ערכית אז גם היא חד-חד-ערכית.~~**
2. **~~הוכח/י: אם ~~~~היא~~~~פונקציה~~~~על אז גם ~~ ~~היא~~~~פונקציה~~~~על.~~**
3. **~~הדגם/י פונקציות  המקיימות את תנאי השאלה כך ש- על אךאינה על.~~**
4. **~~הוכח/י: אם  היא על אז  אינה חד-חד-ערכית.~~**
5. **תהיינה  ו-  פונקציות. הוכח/י את הטענה או ספק דוגמא לשלילת הטענה:**

המשפטים המנחים אותנו יהיו:

1. פונקציה היא חח"ע אמ"ם היא הפיכה משמאל.
2. פונקציה היא חח"ע ועל אמ"ם היא הפיכה, ואז קיימת פונקציה יחידה שהיא ההופכית שלה מימין ומשמאל.
3. **אם  ו-  חח"ע אז גם  חח"ע.**

נכון. הוכחה:

נסמן את הפונקציות ההופכיות משמאל של להיות בהתאמה, ונוכיח כי הפיכה משמאל, ע"י שנראה כי ניתן ע"י הרכבת פונקציות להגיע לפונקצית הזהות:

1. **אם  חח"ע אז  חח"ע.**

נכון. הוכחה:

נסמן את הפונקציה ההופכית משמאל של להיות , ונוכיח כי הפיכה משמאל, ע"י שנראה כי ניתן ע"י הרכבת פונקציות להגיע לפונקציית הזהות:

1. **אם  חח"ע אז  חח"ע.**

לא נכון. דוגמא נגדית:

חח"ע *(בA יש איבר יחיד, והיא מתאימה לו את האיבר היחיד של C), אך איננה חח"ע (היא מתאימה איבר יחיד לשני איברים).*

1. **אם  על וגם  חח"ע אז  חח"ע.**

נכון. הוכחה:

ע"פ הנ"ל (סעיף ב') היא חח"ע, ומכיון שהיא גם על לכן היא הפיכה מימין ומשמאל, ולכן מותר לדבר על , ומתקבלת הנוסחא . נוכיח כי הפיכה משמאל, ע"י שנראה כי ניתן ע"י הרכבת פונקציות להגיע לפונקציית הזהות:

1. **~~תהיינה  ו-  פונקציות. הוכח/י את הטענה או ספק דוגמא לשלילת הטענה:~~**
2. **~~אם  ו-  על אז גם  על.~~**
3. **~~אם  על אז  על.~~**
4. **~~אם  על אז  על.~~**
5. **~~אם  על ו-  חח"ע אז  על.~~**

היא על ולכן היא הפיכה מימין. נסמן את ההופכית שלה בסימון .

ע"פ הנ"ל (סעיף ב') היא על, ומכיון שהיא גם חח"ע לכן היא הפיכה מימין ומשמאל, ולכן מותר לדבר על , ומתקבלת הנוסחא . נוכיח כי הפיכה מימין, ע"י שנראה כי ניתן ע"י הרכבת פונקציות להגיע לפונקציית הזהות:

1. **א. תהי  קבוצה ותהי  פונקציה על.**

**הגדר/י על הקבוצה  יחס שקילות  כך ש  היא החלוקה המושרית על ידי היחס. הוכח/י שהיחס שהגדרת הוא יחס שקילות והסבר/י מדוע נדרש שהפונקציה תהיה על.**

ראשית, נגדיר את היחס בשפה פשוטה יותר, ונאמר שהאיבר b נמצא בחלוקה המוגדרת ע"י אמ"ם . יש לשים לב לכך שהאיבר לא חייב להיות שייך לקבוצה המוגדרת על-ידו (אא"כ ).

ועכשיו נוכיח על היחס שהוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי וסימטרי:

יהי , מכיון ש היא פונקציה אז , ולכן , ומכאן שהיחס הוא **רפלקסיבי**.

יהיו , כך ש, אז מתקיים , ולכן גם , ולכן , ומכאן שהיחס **סימטרי**.

יהיו , כך ש וגם , אז מתקיים , וגם , ולכן גם , ולכן , ומכאן שהיחס **טרנזיטיבי**.

נדרש שהפונקציה תהיה על כדי לומר ש**לכל** איבר בקבוצה ניתן להגדיר מחלקת שקילות שמתאימה לו (למרות שהוא לא איבר במחלקה).

**ב. תהי פונקציה המוגדרת – לכל  .**

**מהי מחלקת השקילות של 1 לפי היחס שהגדרת בסעיף א?**

ומכאן שמחלקת השקילות של 1 היא קבוצת הפתרונות של המשוואה :

נבצע חילוק פולינומים כדי למצוא את הפתרונות הנוספים (מסובך לי לעשות כאן את כל התהליך, אז אכתוב רק תוצאה סופית, כיוון שלא מדובר על תרגיל באלגברה של פולינומים☺):

מסקנא: מחלקת השקילות של 1 היא הקבוצה .

1. **תהי  ונסמן .**

**הוכח/י: אם קיים  עבורו  אז  היא חח"ע ועל.**

**הערה: הכיוון ההפוך נכון כאשר *A* קבוצה סופית.**

נראה כי הפונקציה היא הפיכה, וזה מכריח שהיא חח"ע ועל:

הפיכות מימין: . הפיכות משמאל: .

כמובן שהפונקציה ההופכית משני הצדדים היא אותה הפונקציה – .

נ.ב. ק.ל. שהדבר נכון לא רק אם , אלא די בכך ש הפיכה (צריך רק להוסיף בהופכיות את , וע"פ המשפטים המתאימים נקבל שויון מעניין: )

1. **תהי  מוגדרת כך שלכל : **

**ותהי  מוגדרת כך שלכל : .**

1. **~~מהי  כאשר ?~~**
2. **מהי  כאשר ?**

נשים לב שמדובר על הקבוצה ולא על קטע בציר המספרים, ולכן מדובר על קבוצת המספרים שהסינוס שלהם הוא 1, באיחוד עם קבוצת המספרים שהסינוס שלהם הוא 0.

הערה: אילו היה מדובר על הקטע בציר המספרים, היינו צריכים לפתור אי-השיוויון: .

1. **~~מהי  כאשר ?~~**
2. **מהי  כאשר ?**
3. **~~תהי  פונקציה ותהי .~~**
4. **~~הוכח/י: .~~**
5. **~~הוכח/י: אם  היא חד-חד-ערכית אז .~~**
6. **~~הדגם קבוצות  ופונקציה  שעבורן ההכלה מסעיף א' היא הכלה ממש.~~**
7. **הגדרה: פונקציה נקראת פונקציה קבועה כאשר קיים  כך שלכל  מתקיים .**

**הוכח/י:  פונקציה קבועה אם ורק אם לכל  מתקיים ש-.**

צד א': יהי , ותהי פונקציה קבועה , נוכיח כי :

צד ב': תהי פונקציה המקיימת , ויהיו נוכיח כי :

לכל ניתן להגדיר פונקציה שמקיימת , ומכיון שהשויון מתקיים לכל אז הוא חייב להתקיים לגבי פונקציה זו:

1. **נתונות פונקציות .נתון ש:  הפיכה. הוכח/י:**
2. ** הפיכה.**

הפיכה מימין:

הפיכה משמאל:

1. ** הפיכה. הדרכה: הצג/י את כהרכבה של פונקציות הפיכות.**

יצאנו מהרכבה של 3 פונקציות הפיכות והגענו לפונקציה , ומכאן שהיא הפיכה.

1. **תהי  קבוצה לא ריקה, ותהי .**

**נגדיר פונקציה  כך שלכל :  .**

**ציין/י לגבי כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או אינה נכונה.**

**א. לכל  :  ,**

נכון. הוכחה:

**~~ב. לכל :  חח"ע~~ , ג. לכל :  על.**

שני הדברים **לא נכונים** לגבי כל T המקיימת (לכל A שאינו מוכל בT אין מקור ולכן הפונקציה איננה על, ולכל הקבוצות המכילות את T (ויש לפחות 2 כאלו: T וU) נקבל את T כתוצאת הפונקציה ולכן הפונקציה איננה חח"ע).

**~~ד. קיימת  כך ש- ~~ ,**

נכון (יש כלל בלוגיקה, שכל דבר שהוא נכון "לכל T" אז אפשר להגיד גם "קיים T" שלגביו דבר זה נכון).

**ה. קיימת  כך ש-  חח"ע , ~~ו. קיימת  כך ש-  על.~~**

שני הדברים נכונים לגבי בלבד (ואז מתקיים ).

הערה: לא זכיתי להבין מדוע הגדירו שU חייבת להיות קבוצה שאיננה ריקה.

1. **~~ראינו שיחס מקבוצה סופית לקבוצה סופית יכול להיות מוצג ע"י מטריצה.~~**
2. **~~תהיינה A, B ו-C קבוצות סופיות ותהיינה  ו-  פונקציות כאשר המטריצות המתאימות לפונקציות אלו כיחסים תסומנה: ו-  בהתאמה.  
   וודא/י שמתקיים:  ע"י בדיקת השוויון בכמה דוגמאות שתכין/י.~~**
3. **~~נסה/י להבין מהי משמעות מכפלת המטריצות המתקבלת כאשר המטריצות מתאימות ליחסים שהם אינם בהכרח פונקציות.~~**

**הערה: אם פתרת את דף תרגיל זה ולא השתמשת לפחות בשלושה סעיפים במונחים "הפיכות מימין" / "הפיכות משמאל" , חזור/י ופתור/י את שאלות 5,6,8,12 תוך שימוש במונחים הללו.**